TP 16 : Résonance de systèmes linéaires et analogie

Capacités exigibles :

- À partir des lois de la physique (mécanique, thermique, électrique), établir l'équation différentielle d'un système linéaire et en déduire sa transmittance isochrone.
- Définir, déterminer et mesurer le coefficient de qualité d'un système résonant.
- Utiliser les analogies électriques-thermiques-mécaniques.

I. Régime sinusoïdal forcé et nature du filtrage d'un système mécanique :

On étudie le mouvement d'une masse notée m, suspendue à un ressort de raideur notée k (dont l'unité est le kg/s^2), dans le référentiel terrestre considéré galiléen.
On suspend cette masse m à un ressort vertical : une première position d'équilibre est atteinte, à environ $10\ cm$ du point d'attache A. **On prend l'origine de l'axe $0x$ à la première position d'équilibre du système.**
La masse m est plongée dans un fluide dont le coefficient de frottement visqueux est noté λ, dont l'unité est le kg/s.

A. Observation des deux types de régimes :

Ouvrir la simulation suivante :
http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php?typanim=Javascript

Cette simulation permet d'étudier le système de façon plus complète que l'expérience disponible sur le bureau du professeur.
La représentation temporelle bleue permet de suivre l'évolution de la hauteur du point d'attache A au cours du temps. La hauteur de ce point d'attache A est notée $x_A(t)$ dans la suite du TP : le point d'attache A voit sa hauteur modifiée au cours du temps sous l'effet du Générateur Très Basses Fréquences (GTBF de $0\ Hz$ à $4\ Hz, de\ pulsation\ \omega = 2\pi f$) et de la poulie qui lui est associée.
La représentation temporelle rouge permet de suivre l'évolution de la hauteur de la masse m au cours du temps. La hauteur de la masse m est notée $x(t)$ dans la suite du TP.

Le bouton « Clear » permet d'effacer les représentations temporelles bleue et rouge.
Le bouton « M/A » permet de lancer l'expérience ou de l'arrêter.
Le curseur en dessous de « $Q\ =$ » permet de régler le facteur de qualité du système étudié. On rappelle que plus les frottements visqueux sont grands, plus le facteur de qualité Q du système est faible.
Le graphe en haut à gauche de la simulation ne sera pas exploité.

Premier paramétrage de la simulation :
Mettre le GTBF sur $f = 4{,}0\ Hz$ et le facteur de $Q\ = 2{,}50$. Mettre le système à l'arrêt (attendre que la masse soit à l'équilibre) puis appuyer rapidement sur « Clear » et le bouton « Marche ».

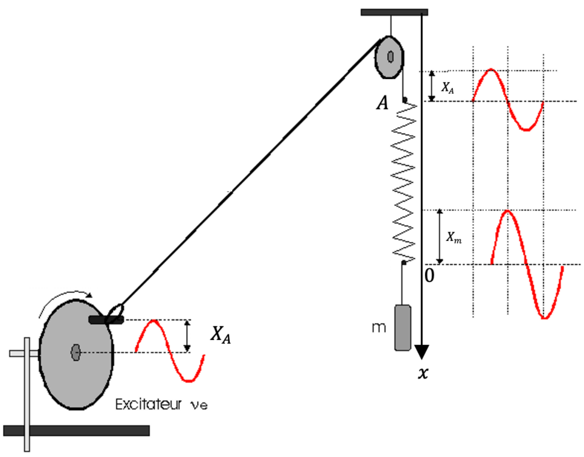
Durant les premières secondes de la simulation :

1. Qualifier à l'aide des adjectifs usuels le signal $x_A(t)$.
2. Observer le mouvement de la masse : le signal $x(t)$ peut-il être qualifié à l'aide des mêmes adjectifs que le signal $x_A(t)$?
3. A l'aide du *paragraphe I.B du chapitre 08*, donner le nom du régime observé ici.
4. Comment nomme-t-on la durée de ce régime ?

Après les premières secondes de la simulation :

5. Le signal $x(t)$ peut-il être qualifié à l'aide des mêmes adjectifs que le signal $x_A(t)$?
6. « A l'œil », le signal $x(t)$ possède-t-il la même fréquence que le signal $x_A(t)$? la même amplitude ?
7. « A l'œil », le signal $x(t)$ est-il en phase, en quadrature de phase ou en opposition de phase avec le signal $x_A(t)$?
8. A l'aide du *paragraphe I.B du chapitre 08*, donner le nom du régime observé ici. Justifier votre réponse.

Pour conclure :



L'extrémité haute du ressort n'étant pas fixe, on donne l'expression littérale de x_A suivante :

$$x_A(t) = X_A \cos \omega t$$

X_A : amplitude des oscillations du point d'attache A, en mm

ω: pulsation des oscillations avec $\omega = 2\pi f$, en $rad.s^{-1}$

9. Entourer sur votre fiche réponse, parmi les expressions suivantes, celle décrivant l'évolution de $x(t)$ en régime sinusoïdal forcé :

$x(t) = X_A \cos(\omega t)$ $\quad$ $x(t) = X_A \cos(\omega t + \varphi)$ $\quad$ $x(t) = \langle x \rangle + X_A \cos(\omega t + \varphi)$

$x(t) = X_m \cos(\omega t)$ $\quad$ $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ $\quad$ $x(t) = \langle x \rangle + X_m \cos(\omega t + \varphi)$

APPEL 1 : Appeler le professeur afin qu'il valide et note votre travail.

⚠ Dans la suite du TP, on se placera toujours en régime sinusoïdal forcé : on attendra toujours que le régime transitoire soit passé avant d'étudier les signaux.

B. Nature du filtrage par simulation :

Mettre le facteur de qualité sur $Q = 0,5$ et la fréquence du GTBF sur $f = 4{,}0\ Hz$.
Mettre le système à l'arrêt (attendre que la masse soit à l'équilibre) puis appuyer rapidement sur « Clear » et le bouton « Marche ». Lancer la simulation.

10. Pour une fréquence $f = 4{,}0\ Hz$ du signal $x_A(t)$, que dire du signal $x(t)$ par rapport au signal $x_A(t)$? On attend une observation sur l'amplitude et le déphasage.

Mettre le système à l'arrêt (attendre que la masse soit à l'équilibre) puis appuyer rapidement sur « Clear » et le bouton « Marche ». Mettre la fréquence du GTBF sur $f = 0{,}4\ Hz$. Lancer la simulation.

11. Pour une fréquence du signal d'entrée $f = 0{,}4\ Hz$ du signal $x_A(t)$, que dire du signal $x(t)$ par rapport au signal $x_A(t)$? On attend une observation sur l'amplitude et le déphasage.
12. Observer le ressort : sa longueur évolue-t-elle au cours du temps ? Comment se comporte-il ?
13. L'amplitude du signal $x(t)$, notée X_m et le déphasage φ du signal $x(t)$ par rapport au signal $x_A(t)$ dépendent-ils de la fréquence f du signal $x_A(t)$?
14. A l'aide de la simulation, qualifier le filtre étudié ici. Justifier votre réponse.

Mettre le facteur de qualité sur $\boldsymbol{Q = 2,50}$, et la fréquence du GTBF sur $f = 4{,}0\ Hz$.
Mettre le système à l'arrêt (attendre que la masse soit à l'équilibre) puis appuyer rapidement sur « Clear » et le bouton « Marche ». Lancer la simulation.

15. Pour une fréquence du signal d'entrée $f = 4{,}0\ Hz$, que dire du signal $x(t)$ par rapport au signal $x_A(t)$? On attend une observation sur l'amplitude et le déphasage.

Mettre le système à l'arrêt (attendre que la masse soit à l'équilibre) puis appuyer rapidement sur « Clear » et le bouton « Marche ». Mettre la fréquence du GTBF sur $f = 0{,}4\ Hz$. Lancer la simulation.

16. Pour une fréquence du signal d'entrée $f = 0{,}4\ Hz$, que dire du signal $x(t)$ par rapport au signal $x_A(t)$? On attend une observation sur l'amplitude et le déphasage.
17. Observer le ressort : sa longueur évolue-t-elle au cours du temps ? Comment se comporte-il ?
18. L'amplitude du signal $x(t)$, notée X_m et le déphasage φ du signal $x(t)$ par rapport au signal $x_A(t)$ dépendent-ils de la fréquence f du signal $x_A(t)$?
19. A l'aide des questions 11 à 18, déterminer si la nature du filtrage du système **semble** dépendre de la valeur du facteur de qualité Q. (Attention, deux exemples ne permettent jamais de tirer une règle générale)

20. Compléter ce paragraphe de conclusion sur votre fiche réponse:

Dans les premiers instants, on observe un régime……………………..(somme du régime libre et du régime forcé), pendant une durée $\Delta t_{5\%}$, suivi d'un régime…………………….. (ou régime permanent) où la fréquence du signal $x(t)$ est identique à celle du signal $x_A(t)$ L'amplitude et le déphasage du signal $x(t)$ par rapport au signal $x_A(t)$ ……………………..de la fréquence imposée par le signal $x_A(t)$.

APPEL 2 : Appeler le professeur afin qu'il valide et note votre travail.

C. Modélisation en régime sinusoïdal forcé : nature « théorique » du filtrage

L'équation différentielle liant le signal d'entrée au signal de sortie est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\lambda}{m} \times \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\, x_A(t)$$

21. De quel ordre est le système ? Justifier votre réponse.
22. A l'aide de la fiche méthode 17, choisir et écrire la forme canonique (contenant le facteur de qualité Q) correspondant à cette équation différentielle. En déduire la nature du filtrage réalisé par ce système mécanique.

23. Quelle grandeur correspond au signal d'entrée ? Quelle grandeur correspond au signal de sortie ?
24. A l'aide d'une identification, déterminer les expressions littérales du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0 du système (en fonction de $\lambda, m\ et\ k$), ainsi que la valeur de H_0.
25. « On rappelle que plus les frottements visqueux sont grands, plus le facteur de qualité Q du système est faible » : cette affirmation est-elle validée par l'expression littérale de Q ?
26. A l'aide des *paragraphes II.A et II.B du chapitre 08* et à partir de la **forme canonique de l'équation différentielle**, établir que la transmittance isochrone complexe du système, $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ a pour expression :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

27. A l'aide du *paragraphe II.C du chapitre 08*, établir l'expression littérale du module de $\underline{H}(j\omega)$, noté $|\underline{H}(j\omega)|$.

On rappelle que $|\underline{H}(j\omega)| = \frac{X_m}{X_A}$

28. Déterminer la limite de $|\underline{H}(j\omega)|$ pour les basses fréquences (ou basses pulsations). En déduire si le système est passeur, atténuateur ou amplificateur à basses fréquences.
29. Déterminer la limite de $|\underline{H}(j\omega)|$ pour les hautes fréquences (ou hautes pulsations). En déduire si le système est passeur, atténuateur ou amplificateur à hautes fréquences.
30. Conclure en déterminant la nature du filtrage réalisé par le système, à l'aide des questions 28 et 29 : retrouve-t-on la même nature de filtrage que dans la question 14 ?
31. Cette nature de filtrage dépend du facteur de qualité Q si les limites déterminées en questions 28 et 29 dépendent du facteur de qualité Q : est-ce le cas ici ? Conclure en indiquant si la nature du filtrage du système dépend de la valeur du facteur de qualité Q.

APPEL 3 : Appeler le professeur afin qu'il valide et note votre travail. (2 heures au maximum)

II. Résonance en amplitude du système :

A. Influence du facteur de qualité :

Mettre le facteur de qualité sur $Q = 2,50$, et la fréquence du GTBF sur $f = 0,50\ Hz$.
Mettre le système à l'arrêt (attendre que la masse soit à l'équilibre) puis appuyer rapidement sur « Clear » et le bouton « Marche ». Lancer la simulation.
Puis augmenter la fréquence f jusqu'à $f = 1,10\ Hz$: attendre que le régime transitoire disparaisse à chaque fois.

32. Pour une fréquence du signal d'entrée $f = 1,10\ Hz$, que dire de l'amplitude X_m du signal de sortie par rapport à celle du signal d'entrée X_A?

Puis augmenter la fréquence f jusqu'à $f = 1,40\ Hz$: attendre que le régime transitoire disparaisse à chaque fois.

33. Pour une fréquence du signal d'entrée $f = 1,40\ Hz$, que dire du signal de sortie par rapport au signal d'entrée ? On attend une observation sur l'amplitude et une valeur de déphasage.

Puis augmenter la fréquence f jusqu'à $f = 1,80\ Hz$: attendre que le régime transitoire disparaisse à chaque fois.

34. Pour une fréquence du signal d'entrée $f = 1{,}80\ Hz$, que dire du signal de sortie par rapport au signal d'entrée ? On attend une observation sur l'amplitude.

On admet que le système est passif :

35. Pour $Q = 2{,}50$, le système amplifie-t-il autour de $f = 1{,}40\ Hz$?

Mettre le facteur de qualité sur $Q = 0,50$, et la fréquence du GTBF sur $f = 0{,}50\ Hz$.
Mettre le système à l'arrêt (attendre que la masse soit à l'équilibre) puis appuyer rapidement sur « Clear » et le bouton « Marche ». Lancer la simulation.
Puis augmenter la fréquence f jusqu'à $f = 1{,}10\ Hz$: attendre que le régime transitoire disparaisse à chaque fois.

36. Pour une fréquence du signal d'entrée $f = 1{,}10\ Hz$, que dire de l'amplitude X_m du signal de sortie par rapport à celle du signal d'entrée X_A?

Puis augmenter la fréquence f jusqu'à $f = 1{,}40\ Hz$: attendre que le régime transitoire disparaisse à chaque fois.

37. Pour une fréquence du signal d'entrée $f = 1{,}40\ Hz$, que dire de l'amplitude X_m du signal de sortie par rapport à celle du signal d'entrée X_A?

Puis augmenter la fréquence f jusqu'à $f = 1{,}80\ Hz$: attendre que le régime transitoire disparaisse à chaque fois.

38. Pour une fréquence du signal d'entrée $f = 1{,}80\ Hz$, que dire du signal de sortie par rapport au signal d'entrée ? On attend une observation sur l'amplitude.
39. Observe-t-on le même phénomène, nommé « résonance en amplitude », pour $Q = 0{,}50\ et\ Q = 2{,}50$?

40. Sur votre fiche réponse, compléter ce paragraphe de conclusion :

Pour un système …………….. d'ordre ….. :

Lorsque $Q > 0{,}707$, il existe une fréquence du signal d'entrée pour laquelle……………………..du signal de sortie est plus importante que ……………………..du signal d'entrée et est ……………………..
Cette fréquence du signal d'entrée est appelée fréquence de ……………….. du système et est notée f_r

Pour cette fréquence du signal d'entrée, si Q est grand, le signal de sortie est déphasé d'environ ……… par rapport au signal d'entrée.

Si $Q > 0{,}707$, on observe alors une ……………. en amplitude du système.

APPEL 4 : Appeler le professeur afin qu'il valide et note votre travail.

B. Etude théorique par simulation sur Python :

On rappelle que la transmittance isochrone de ce système a pour expression littérale :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

On a aussi $\omega = 2\pi f$ et $\omega_0 = 2\pi f_0$.

41. Déterminer l’ expression littérale de la transmittance isochrone en fonction de la fréquence f, notée $\underline{H}(jf)$.

On souhaite tracer l’évolution du module de la transmittance $\left|\underline{H}(jf)\right| = \frac{X_m}{X_A}$ en fonction de la fréquence f du signal d’entrée, pour plusieurs facteurs de qualité du système :

$$Q = 2{,}50 \quad ; \quad Q_1 = 1{,}50 \quad ; \quad Q_2 = 0{,}707 \quad ; \quad Q_3 = 0{,}50$$

Ouvrir le script nommé « TP16_module_H.py » puis compléter les lignes vides à l’aide de :
- la grandeur « 1j » qui signifie le nombre complexe « j »
- la fonction abs( ) qui permet de cacluler le module d’une grandeur complexe.

Lancer l’exécution du script.

APPEL 5 : Appeler le professeur afin qu’il valide et note votre travail.

On donne la valeur de la fréquence propre du système : $f_0 = 1{,}50\ Hz$ (fréquence des oscillations lorsque le système n’est soumis à aucun frottement ni à aucune excitation extérieure).

42. Lorsque c’est possible, déterminer la fréquence de résonance, notée f_r et la valeur maximale du rapport $\frac{X_m}{X_A}$.
43. Compléter la phrase suivante sur votre fiche réponse :

Plus le facteur de qualité est élevé, plus le phénomène de résonance est ……………………..et plus la fréquence de résonance f_r s’approche de la fréquence……………………..du système. Pour un facteur de qualité élevé, le rapport des amplitudes $\frac{X_m}{X_A}$ est proche de la valeur du ……………………..

44. Pour $Q \gg 0{,}707$ (c’est-à-dire lorsque la résonance en amplitude est prononcée), qualifier la nature du filtrage du système (autour de la fréquence de résonance).

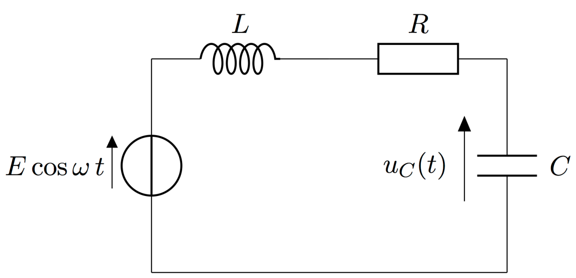
A l’aide de l’expérience réalisée par le professeur en début de séance, répondre aux questions suivantes :

45. Le facteur de qualité du système présent sur la paillasse professeur est-il plus petit ou plus grand que $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $(= 0{,}707)$? Justifier votre réponse.

APPEL 6 : Appeler le professeur afin qu’il valide et note votre travail.

III. Résonance d’un système électrique :

A. Modélisation du système : réponse fréquentielle



On étudie le système électrique ci-contre composé d'une bobine idéale d'inductance L, d'un conducteur ohmique de résistance R et d'un condensateur, de capacité C : le signal $e(t)$, délivré par un GBF, est sinusoïdal, de pulsation ω tel que :

$$e(t) = E \cos \omega t$$

Le signal de sortie est u_C.

L'équation différentielle liant le signal d'entrée au signal de sortie est :

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{e(t)}{LC}$$

46. De quel ordre est le système ? Justifier votre réponse.
47. A l'aide de la fiche méthode 11, choisir et écrire la forme canonique (contenant le facteur de qualité Q) correspondant à cette équation différentielle. En déduire la nature du filtrage réalisé par ce système électrique.
48. A l'aide des questions 22 et 26 (pour le système mécanique), donner (sans aucune démonstration) l'expression littérale de la transmittance isochrone complexe du système électrique, $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_C}}{\underline{e}}$.
49. A l'aide des questions 26 et 27, donner (sans aucune démonstration) l'expression littérale du module de $\underline{H}(j\omega)$, noté $|\underline{H}(j\omega)|$.
50. Compléter sur l'annexe 01 présentant le tableau de grandeurs analogues pour les deux situations étudiées dans ce TP, les 5 premières lignes vides.

APPEL 7 : Appeler le professeur afin qu'il valide et note votre travail.

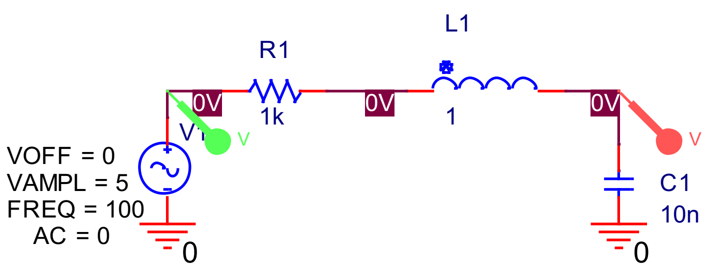
51. Finir de compléter, par analogie, l'intégralité de l'annexe 01, après avoir entendu les conseils de l'enseignant.

APPEL 8 : Appeler le professeur afin qu'il valide et note votre travail.

Maintenant que vous avez réussi à prédire le comportement du système électrique en vous basant sur vos observations du système mécanique, nous allons vérifier vos prédictions.

B. <u>Vérification par simulation du système électrique :</u>

On simule le système étudié, à l'aide d'un logiciel spécialisé :



On donne $C = 10{,}00\,\eta F$, $L = 1{,}000\,H$ et $R = 1000\,\Omega$ et $E = 5{,}0\,V$

La fréquence de résonance du système, notée f_r, a pour expression théorique :

$$f_r = f_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$$

52. Calculer le facteur de qualité Q du système, sa fréquence propre f_0 et sa fréquence de résonance f_r.
53. Prévoir les phénomènes observés sur le signal de sortie (régimes, amplitude, déphasage) si le signal d'entrée à une fréquence $f = 100\ Hz$, puis $f = 1588\ Hz$ et enfin $f = 5000\ Hz$.
54. Vérifier vos prévisions à l'aide des simulations (en annexe 02) faite par le professeur.

On a maintenant $C = 10{,}00\ \eta F$, $L = 1{,}000\ H$ et $R = 100{,}0\ k\Omega$.

55. Calculer le facteur de qualité du système : le phénomène de résonance en amplitude est-il observable ici ? Justifier votre réponse.
56. Prévoir les phénomènes observés sur le signal de sortie (amplitude, déphasage) si le signal d'entrée à une fréquence $f = 100\ Hz$, puis $f = 1588\ Hz$ et enfin $f = 5000\ Hz$.
57. Vérifier vos prévisions à l'aide des simulations (en annexe 03) faite par le professeur.

APPEL 9 : Appeler le professeur afin qu'il valide et note votre travail.