TP 12 : Réponse indicielle d'un système linéaire
Correction de la partie expérimentale

I. Étude théorique d'un système électrique :

1. L'équation différentielle liant u_C et $e(t)$ est :

On applique la loi des mailles (ou d'additivité des tensions) dans le circuit :

$$e(t) = u_R + u_C$$

Or, $u_R = Ri$:

$$e(t) = Ri + u_C \qquad ,et \quad i = C \times \frac{du_C}{dt} \qquad donc:$$

$$e(t) = RC\frac{du_C}{dt} + u_C$$

On normalise l'équation différentielle, c'est-à-dire que le terme de plus haute dérivée doit avoir un coefficient égal à 1 :

$$RC \times \frac{du_C}{dt} + u_C = e(t)$$

On divise par RC l'ensemble de l'équation :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{e(t)}{RC}$$

2. La forme canonique correspondant à cette équation différentielle est :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = H_0 \times \frac{e}{\tau}$$

3. Le système est un passe-bas d'ordre 1.
4. Par identification, on obtient :

Équation différentielle démontrée	$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{e(t)}{RC}$
Forme canonique associée	$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = H_0 \times \frac{e(t)}{\tau}$

Par identification, on obtient donc un système de 3 équations à 3 inconnues ($s, \tau\ et\ H_0$) :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{du_C}{dt} \quad ; \frac{s}{\tau} = \frac{u_C}{RC}\ et\ \ H_0 \times \frac{e(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{RC}$$

Il faut résoudre ce système de 3 équations en gardant en tête, que l'on cherche les expressions littérales des grandeurs canoniques (H_0 ; τ) en fonction des paramètres du système étudié (ici, $R\ et\ C$).

$$\frac{ds}{dt} = \frac{du_C}{dt} \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{s = u_C}$$

$$\frac{s}{\tau} = \frac{u_C}{RC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s}{\tau} = \frac{s}{RC} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\tau = RC}$$

$$H_0 \times \frac{e(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{RC} \quad \Leftrightarrow H_0 \times \frac{e(t)}{RC} = \frac{e(t)}{RC} \Leftrightarrow \boldsymbol{H_0 = 1}$$

II. Suivi de la température du système thermodynamique, au cours du temps :

B. Protocole expérimental :

5. On mesure $R_1 = 99{,}90\ \Omega$.
6. On a $U = 20\ V\ et\ I = 2{,}0\ A$.

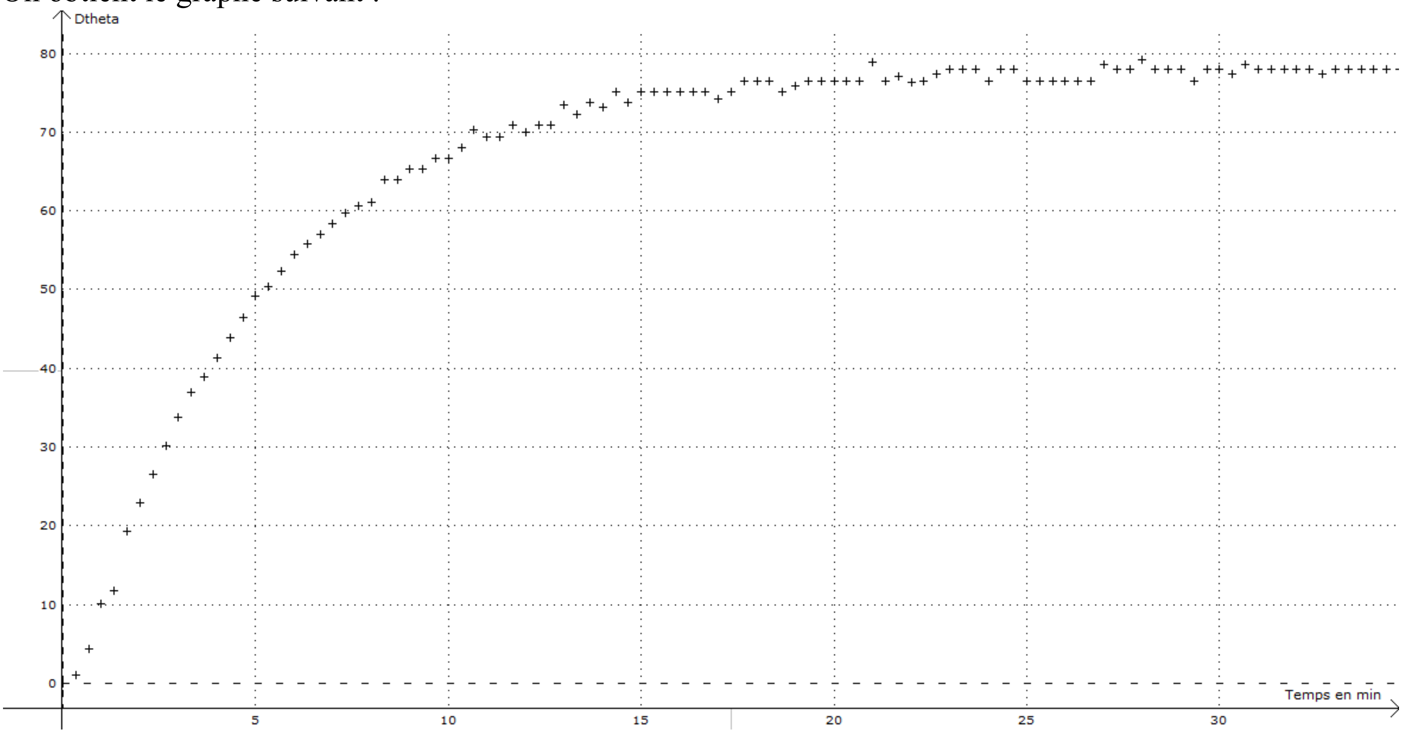
Calcul de $P_{fournie}$:

$$P_{fournie} = UI = 20 \times 2{,}0 = 40\ W$$

III. Exploitation de la réponse indicielle expérimentale du système :

A. Obtention de la variation de la température en fonction du temps :

On obtient le graphe suivant :



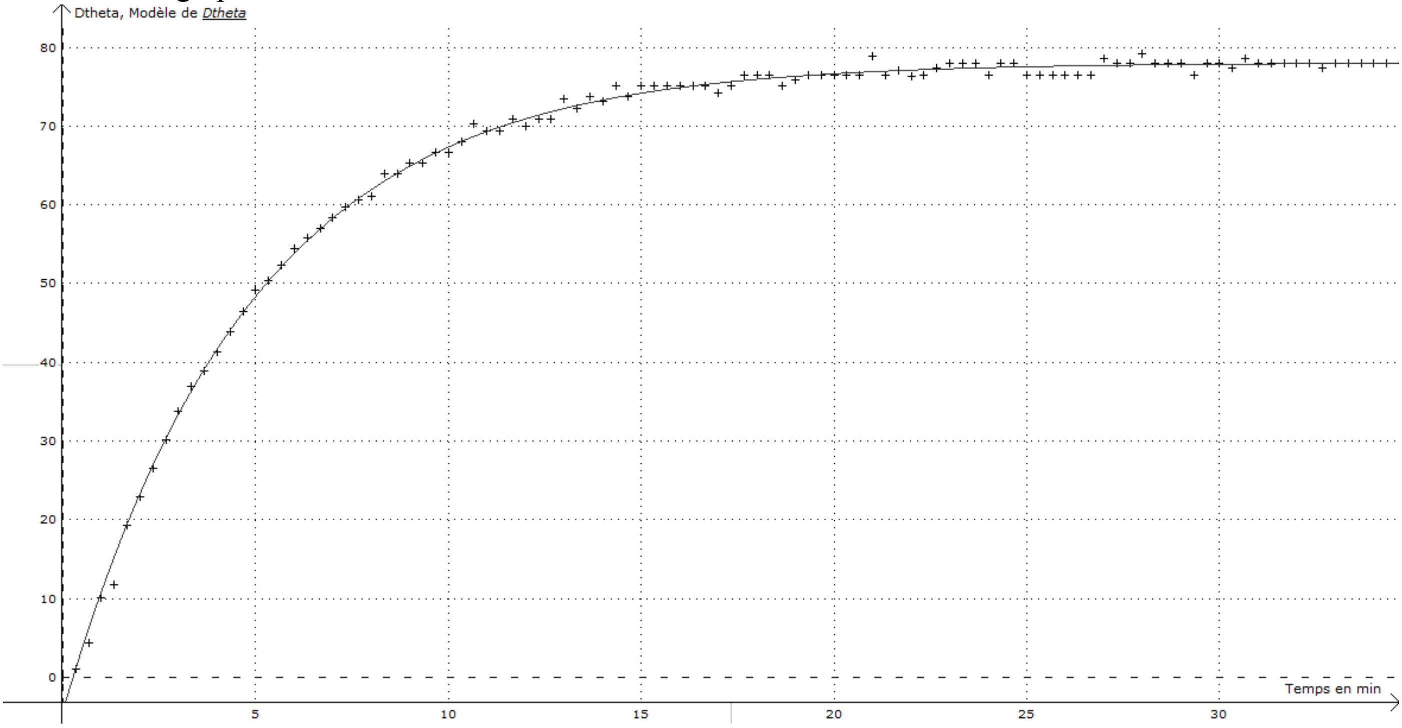
B. Caractérisation du système :

Nature du filtrage :

7. Le signal de sortie contient des basses fréquences (comme le signal d'entrée) car sa variation globale est non nulle. Le système étudié laisse donc passer les basses fréquences.
8. Le signal de sortie ne contient pas des hautes fréquences (contrairement au signal d'entrée) car il ne possède pas de discontinuité. Le système étudié ne laisse donc pas passer les hautes fréquences.
9. Le système étudié est donc un passe-bas.

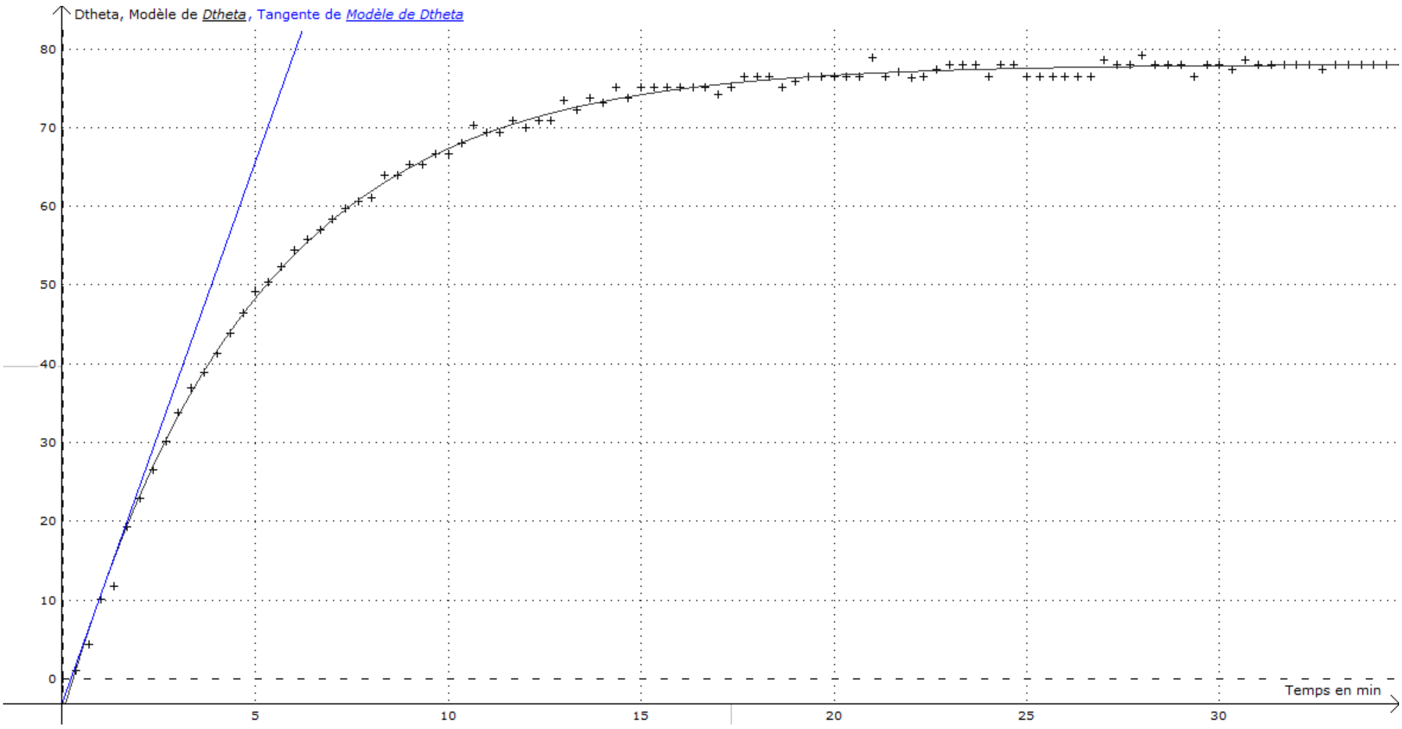
Modélisation de $\Delta\theta\ (t)$:

On obtient le graphe suivant :



10. La modélisation donne $a = 78{,}025\ °C,\ b = 15{,}8\ s\ et\ \tau = 294{,}007\ s$.

11. Le tracé de la tangente à l'origine donne sur LATISPRO :



Le système est un passe-bas et le coefficient directeur de la tangente à l'origine est non nul : $a = 0{,}229°C/min$. Le système est donc d'ordre 1.

Bande passante du système thermodynamique :

12. La fréquence de coupure donne :

$$f_c = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi \times 294{,}007} = 5{,}41330\ \times 10^{-4} Hz$$

13. La bande passante est :

$$[0\,;5{,}41330\ \times 10^{-4}\,mHz]$$

La largeur de la bande passante est :

$$\Delta f = f_c - 0 = 5{,}41330\ \times 10^{-4} Hz$$

Coefficient de convection forcée :

14. Par identification, on obtient :

$$a = \frac{P_e}{h \times S}$$

15. Valeur de h:

$$h = \frac{P_e}{aS} = \frac{40}{78{,}025 \times 1{,}30 \times 10^{-2}} = 39\, W.°C^{-1}.m^{-2}$$

16. $39\, W.°C^{-1}.m^{-2}$ est compris entre $10\, W.°C^{-1}.m^{-2}$ et $50\, W.°C^{-1}.m^{-2}$. L'expérience est donc concluante et le modèle est approprié.

Capacité thermique massique du dissipateur :

17. Valeur de la capacité thermique massique notée c :

$$c = \tau h \frac{S}{m} = 294{,}007 \times 39 \times 1{,}30 \times \frac{10^{-2}}{0{,}180} = 8{,}3 \times 10^3 J.kg^{-1}.°C^{-1}$$

18. L'écart relatif pour la capacité thermique massique donne 7,7%. L'expérience est donc concluante et le modèle est approprié.
19. Voir tableau ci-dessous.

C. Lien entre la durée de réponse à 5% et la constante de temps du système :

20. On calcule $0{,}95 \times s_\infty = 0{,}95 \times 78{,}025 = 74{,}124°C$

Puis, on détermine graphiquement $\Delta t_{5\%} = 14\,\text{min}\,54\,s = 894s$

21. On a :

$$3\tau = 3 \times 294{,}007 = 882{,}021s \quad et\ \Delta t_{5\%} = 894s$$

22. L'écart relatif donne :

$$\frac{\Delta t_{5\%} - 3\tau}{3\tau} = 1{,}3\ \%$$

La formule est donc vérifiée ici.

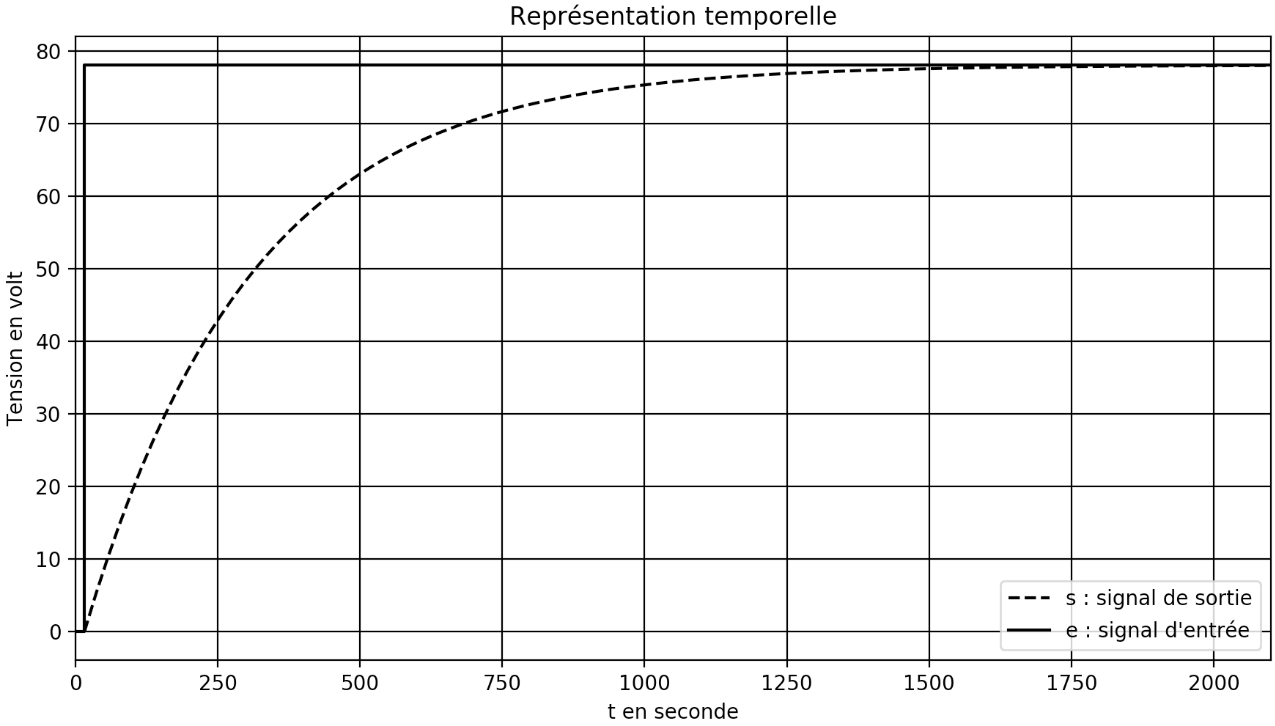
IV. Analogie entre un système électrique et le système thermodynamique précédent :

A. Retour sur le système électrique de l'appel 0 :

23. D'après l'énoncé, on a $C = 149\ F$. Donc :

$$R = \frac{\tau}{C} = \frac{294{,}007}{149} = 1{,}97\ \Omega$$

La simulation donne :



24. Suite à la simulation, sur Pyhton, on obtient une tension de sortie $s(t)$ qui est identique à la courbe $\Delta\theta(t)$:
- La mesure de τ donne de nouveau 394s.
- La valeur de $s(t)$ tend vers 20 V : $s_\infty = 78\,V$
- Passe-bas
- Le système est d'ordre 1 car la tangente à l'origine n'est pas horizontale.
- $f_c = \frac{1}{2\pi\tau} = 5{,}4 \times 10^{-4} Hz$
- $\Delta t_{5\%} \approx 900s$

25. Voir tableau ci-après

	Système thermodynamique	Système électrique
Ordre du système	1	1
Nature du filtre	Passe-bas	Passe-bas
Équation différentielle	$\frac{d(\theta - \theta_{ext})}{dt} + \frac{hS}{mc}(\theta - \theta_{ext}) = \frac{UI}{mc}$	$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{e(t)}{RC}$
Forme canonique de l'équation différentielle	$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = H_0 \frac{e}{\tau}$	$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = H_0 \frac{e}{\tau}$
Valeur de l'échelon du signal d'entrée	$\theta_{sans\ stockage} - \theta_{ext} = 78{,}025\ °C$	$E = 78{,}025\ V$
Signal de sortie	$\Delta\theta = \theta - \theta_{ext}$	u_C
Expression littérale de la constante de temps τ	$\tau = \frac{mc}{hS}$	$\tau = RC$
Valeur de τ	$\tau = 294{,}007\ s$	$\tau = 294{,}007\ s$
Fréquence de coupure f_c en Hz	$f_c = 5{,}41330 \times 10^{-4}\ Hz$	$f_c = 5{,}41330 \times 10^{-4} Hz$
Valeur de s_∞	$78{,}025°C$	$78{,}025\ V$
Valeur de l'amplification statique H_0	$H_0 = 1$	$H_0 = 1$
Capacité	Capacité thermique : $C = mc = 149\ J/K$	Capacité du condensateur : $C = 149\ F$
Expression, valeur et unité de la résistance	Résistance thermique : $R = \frac{1}{hS} = 2{,}0\ °C.W^{-1}$	Résistance électrique : $R = \frac{\tau}{C} = 2{,}0\Omega$

TP 12 : Réponse indicielle d'un système linéaire
Correction de la partie théorique

❖ **Étude théorique du système thermodynamique :**

Mise en place de l'équation différentielle régissant le système : bilan de puissance

a) Bilan de puissance afin de déterminer l'équation différentielle régissant ce système :

$$P_{fournie} = P_{stockée} + P_{perdue}$$

$$UI = mc \times \frac{d(\theta - \theta_{ext})}{dt} + h \times S \times (\theta - \theta_{ext})$$

On divise par mc de chaque côté :

$$\frac{UI}{mc} = \frac{d(\theta - \theta_{ext})}{dt} + \frac{h \times S}{mc} \times (\theta - \theta_{ext})$$

On obtient donc :

$$\frac{d(\theta - \theta_{ext})}{dt} + \frac{hS}{mc}(\theta - \theta_{ext}) = \frac{UI}{mc}$$

b) La forme canonique de cette équation est :

$$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = H_0 \frac{e}{\tau}$$

c) Il s'agit de la forme canonique d'un filtre passe-bas d'ordre 1.

d) Si toute la puissance reçue est directement perdue, le bilan de puissance devient :

$$P_{fournie} = P_{perdue}$$

$$UI = h \times S \times (\theta_{sans\ stockage} - \theta_{ext})$$

On divise par hS de chaque côté :

$$\theta_{sans\ stockage} - \theta_{ext} = \frac{UI}{hS}$$

B. Identification des grandeurs :

e) Par identification, on trouve :

Équation différentielle démontrée	$\frac{d(\theta - \theta_{ext})}{dt} + \frac{hS}{mc}(\theta - \theta_{ext}) = \frac{P_e}{mc}$
Forme canonique associée	$\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} = H_0 \times \frac{e(t)}{\tau}$

Par identification, on obtient donc un système de 3 équations à 3 inconnues ($s, \tau\ et\ H_0$) qui résolue, donne :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(\theta - \theta_{ext})}{dt} \Leftrightarrow s = \theta - \theta_{ext}$$

$$\frac{s}{\tau} = \frac{hS}{mc}(\theta - \theta_{ext}) \Leftrightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{hS}{mc} \Leftrightarrow \tau = \frac{mc}{hS}$$

$$H_0\frac{e}{\tau} = \frac{UI}{mc} \Leftrightarrow H_0\frac{\frac{UI}{hS}}{\frac{mc}{hS}} = \frac{UI}{mc} \Leftrightarrow H_0\frac{UI}{mc} = \frac{UI}{mc} \Leftrightarrow H_0 = 1$$

❖ **De la tension aux bornes de la sonde de platine à la variation de la température du système :**

1ère étape : de la tension $EA0$ à la résistance R de la sonde de platine

f) Le système est un pont diviseur de tension :

$$EA0 = \frac{R}{R + R_1} \times EA1$$

g) La formule littérale de la résistance de la sonde platine R est donc :

$$EA0 = \frac{R}{R + R_1} \times EA1 \Leftrightarrow EA0 \times (R + R_1) = R \times EA1 \Leftrightarrow EA0 \times R + EA0 \times R_1 = R \times EA1$$

$$\Leftrightarrow EA0 \times R_1 = R \times EA1 - EA0 \times R \Leftrightarrow EA0 \times R_1 = R \times (EA1 - EA0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{EA0 \times R_1}{(EA1 - EA0)} = R$$

2ème étape : de la résistance R de la sonde de platine à la température θ

h) Équation réciproque $\theta(R)$ qui permet de calculer la température θ à partir de la valeur de la résistance R de la sonde de platine :

$$\frac{R}{R_0} = 1 + b \times \theta \Leftrightarrow \frac{R}{R_0} - 1 = b \times \theta \Leftrightarrow \frac{R}{bR_0} - \frac{1}{b} = \theta$$