Correction de l'exercice 2 - TD du chapitre 08

❖ **Système A :**

Graphiquement, on détermine :

$$\boldsymbol{U_m = 4,0\ V}$$
$$\boldsymbol{E = 5,0\ V}$$

On a, pour les deux signaux : $T = 20\ ms = 20 \times 10^{-3} s$. Donc :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20 \times 10^{-3}} = \boldsymbol{3,1 \times 10^2\ rad/s}$$

Remarque : les deux signaux ont même pulsation, on observe ici le régime forcé (ou permanent).

Le signal de sortie est en avance par rapport au signal d'entrée donc Δt doit être positif et φ doit être positif aussi.

On mesure le décalage temporel :

$$\Delta t = t_{entrée} - t_{sortie} = 15 - 11,6 = 3,4\ ms = 3,4 \times 10^{-3} s$$

On calcule :

$$\varphi = \Delta t \times \omega = 3,4 \times 10^{-3} \times 3,1 \times 10^2 = \mathbf{1,1}\ (rad)$$

On vérifie que Δt est positif et φ est positif aussi.

On obtient donc :

$$e(t) = 5,0 \cos(3,1 \times 10^2 t)$$

$$s(t) = 4,0 \cos(3,1 \times 10^2 t + 1,1)$$

En complexe, les signaux deviennent :

$$\underline{e(t)} = 5,0 e^{j3,1\times10^2 t}$$

$$\underline{s(t)} = 4,0 e^{j(3,1\times10^2 t + 1,1)}$$

L'expression numérique de $\underline{H}(j3,1 \times 10^2)$ donne :

$$\underline{H}(j3,1 \times 10^2) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{4,0 e^{j(3,1\times10^2 t+1,1)}}{5,0 e^{j3,1\times10^2 t}} = \frac{4,0}{5,0} \times \frac{e^{j3,1\times10^2 t} \times e^{j1,1}}{e^{j3,1\times10^2 t}}$$

$$\underline{H}(j3,1 \times 10^2) = \frac{4,0}{5,0} \times e^{j1,1} = \boldsymbol{0,80 \times e^{j1,1}}$$

❖ **Système B :**

Graphiquement, on détermine :

$$\boldsymbol{U_m = 4,0\ V}$$
$$\boldsymbol{E = 5,0\ V}$$

On a, pour les deux signaux : $T = 20\ ms = 20 \times 10^{-3}s$. Donc :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20 \times 10^{-3}} = \boldsymbol{3,1 \times 10^2\ rad/s}$$

<u>*Remarque :*</u> les deux signaux ont même pulsation, on observe ici le régime forcé (ou permanent).

Le signal de sortie est en avance par rapport au signal d'entrée donc Δt doit être positif et φ doit être positif aussi.

On mesure le décalage temporel :

$$\Delta t = t_{entrée} - t_{sortie} = 15 - 10 = 5\ ms = 5 \times 10^{-3}s$$

On calcule :

$$\varphi = \Delta t \times \omega = 5 \times 10^{-3} \times 3,1 \times 10^2 = \mathbf{1,6}\ (rad)$$

On vérifie que Δt est positif et φ est positif aussi.

<u>*Remarque :*</u> $\varphi = 1,6 \approx \frac{\pi}{2}$ *les signaux sont en quadrature de phase.*

On obtient donc :

$$e(t) = 5,0 \cos(3,1 \times 10^2 t)$$

$$s(t) = 4,0 \cos(3,1 \times 10^2 t + 1,6)$$

En complexe, les signaux deviennent :

$$\underline{e(t)} = 5,0 e^{j3,1\times10^2 t}$$

$$\underline{s(t)} = 4,0 e^{j(3,1\times10^2 t+1,6)}$$

L'expression numérique de $\underline{H}(j3,1 \times 10^2)$donne :

$$\underline{H}(j3,1 \times 10^2) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{4,0e^{j(3,1\times10^2 t+1,6)}}{5,0e^{j3,1\times10^2 t}} = \frac{4,0}{5,0} \times \frac{e^{j3,1\times10^2 t} \times e^{j1,6}}{e^{j3,1\times10^2 t}}$$

$$\underline{H}(j3,1 \times 10^2) = \frac{4,0}{5,0} \times e^{j1,6} = \mathbf{0,80} \times \boldsymbol{e^{j1,6}}$$

- **Système C :**

Graphiquement, on détermine :

$$\boldsymbol{U_m = 4,0\ V}$$
$$\boldsymbol{E = 5,0\ V}$$

On a, pour les deux signaux : $T = 20\ ms = 20 \times 10^{-3} s$. Donc :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20 \times 10^{-3}} = \boldsymbol{3,1 \times 10^2\ rad/s}$$

<u>*Remarque :*</u> les deux signaux ont même pulsation, on observe ici le régime forcé (ou permanent).

Le signal de sortie est en retard par rapport au signal d'entrée donc Δt doit être négatif et φ doit être négatif aussi.

On mesure le décalage temporel :

$$\Delta t = t_{entrée} - t_{sortie} = 5 - 10 = -5\ ms = -5 \times 10^{-3} s$$

On calcule :

$$\varphi = \Delta t \times \omega = -5 \times 10^{-3} \times 3,1 \times 10^2 = \boldsymbol{-1,6}\ (rad)$$

On vérifie que Δt est négatif et φ est négatif aussi.

<u>*Remarque :*</u> $\varphi = -1,6 \approx -\frac{\pi}{2}$ *les signaux sont en quadrature de phase.*

On obtient donc :

$$e(t) = 5,0 \cos(3,1 \times 10^2 t)$$

$$s(t) = 4,0 \cos(3,1 \times 10^2 t - 1,6)$$

En complexe, les signaux deviennent :

$$\underline{e(t)} = 5,0 e^{j3,1\times10^2 t}$$

$$\underline{s(t)} = 4,0 e^{j(3,1\times10^2 t - 1,6)}$$

L'expression numérique de $\underline{H}(j3,1 \times 10^2)$ donne :

$$\underline{H}(j3,1 \times 10^2) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{4,0 e^{j(3,1\times10^2 t-1,6)}}{5,0 e^{j3,1\times10^2 t}} = \frac{4,0}{5,0} \times \frac{e^{j3,1\times10^2 t} \times e^{-j1,6}}{e^{j3,1\times10^2 t}}$$

$$\underline{H}(j3,1 \times 10^2) = \frac{4,0}{5,0} \times e^{-j1,6} = \boldsymbol{0,80 \times e^{-j1,6}}$$

- **Système D :**

Graphiquement, on détermine :

$$\boldsymbol{U_m = 4,0\ V}$$
$$\boldsymbol{E = 5,0\ V}$$

On a, pour les deux signaux : $T = 20\ ms = 20 \times 10^{-3}s$. Donc :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20 \times 10^{-3}} = \mathbf{3,1 \times 10^2}\ \boldsymbol{rad/s}$$

Remarque : les deux signaux ont même pulsation, on observe ici le régime forcé (ou permanent).

Le signal de sortie est en retard par rapport au signal d'entrée donc Δt doit être négatif et φ doit être négatif aussi.

On mesure le décalage temporel :

$$\Delta t = t_{entrée} - t_{sortie} = 5 - 11,6 = -6,6\ ms = -6,6 \times 10^{-3}s$$

On calcule :

$$\varphi = \Delta t \times \omega = -6,6 \times 10^{-3} \times 3,1 \times 10^2 = \mathbf{-2,1}\ (rad)$$

On vérifie que Δt est négatif et φ est négatif aussi.

On obtient donc :

$$e(t) = 5,0 \cos(3,1 \times 10^2 t)$$

$$s(t) = 4,0 \cos(3,1 \times 10^2 t - 2,1)$$

En complexe, les signaux deviennent :

$$\underline{e(t)} = 5,0e^{j3,1\times10^2 t}$$

$$\underline{s(t)} = 4,0e^{j(3,1\times10^2 t-2,1)}$$

L'expression numérique de $\underline{H}(j3,1 \times 10^2)$ donne :

$$\underline{H}(j3,1 \times 10^2) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{4,0e^{j(3,1\times10^2 t-2,1)}}{5,0e^{j3,1\times10^2 t}} = \frac{4,0}{5,0} \times \frac{e^{j3,1\times10^2 t} \times e^{-j2,1}}{e^{j3,1\times10^2 t}}$$

$$\underline{H}(j3,1 \times 10^2) = \frac{4,0}{5,0} \times e^{-j2,1} = \mathbf{0,80} \times \boldsymbol{e^{-j2,1}}$$

- **Système E :**

Graphiquement, on détermine :

$$\boldsymbol{U_m = 4,0\ V}$$
$$\boldsymbol{E = 5,0\ V}$$

On a, pour les deux signaux : $T = 20\ ms = 20 \times 10^{-3} s$. Donc :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20 \times 10^{-3}} = \mathbf{3,1 \times 10^2\ rad/s}$$

Remarque : les deux signaux ont même pulsation, on observe ici le régime forcé (ou permanent).

Le signal de sortie est en phase par rapport au signal d'entrée donc Δt est nul et φ est nul aussi.

On obtient donc :

$$e(t) = 5,0 \cos(3,1 \times 10^2 t)$$

$$s(t) = 4,0 \cos(3,1 \times 10^2 t)$$

En complexe, les signaux deviennent :

$$\underline{e(t)} = 5,0 e^{j3,1 \times 10^2 t}$$

$$\underline{s(t)} = 4,0 e^{j(3,1 \times 10^2 t)}$$

L'expression numérique de $\underline{H}(j3,1 \times 10^2)$ donne :

$$\underline{H}(j3,1 \times 10^2) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{4,0 e^{j(3,1 \times 10^2 t)}}{5,0 e^{j3,1 \times 10^2 t}}$$

$$\underline{H}(j3,1 \times 10^2) = \frac{4,0}{5,0} = \mathbf{0,80}$$

❖ **Système F :**

Graphiquement, on détermine :

$$\boldsymbol{U_m = 4,0\ V}$$
$$\boldsymbol{E = 5,0\ V}$$

On a, pour les deux signaux : $T = 20\ ms = 20 \times 10^{-3} s$. Donc :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20 \times 10^{-3}} = \mathbf{3,1 \times 10^2}\ \boldsymbol{rad/s}$$

<u>Remarque :</u> les deux signaux ont même pulsation, on observe ici le régime forcé (ou permanent).

Le signal de sortie est en opposition de phase par rapport au signal d'entrée : c'est le cas ou le signe de Δt et φ est inconnu.

On mesure le décalage temporel :

$$\Delta t = t_{entrée} - t_{sortie} = 15 - 5 = 10\ ms = 10 \times 10^{-3} s$$
ou
$$\Delta t = t_{entrée} - t_{sortie} = 15 - 25 = -10\ ms = -10 \times 10^{-3} s$$

On calcule :

$$\varphi = \Delta t \times \omega = \pm 10 \times 10^{-3} \times 3,1 \times 10^2 = \pm \mathbf{3,1}\ (rad)$$

<u>Remarque :</u> $\varphi = \pm \mathbf{3,1} \approx \pm \pi$ *les signaux sont en opposition de phase.*

On obtient donc :

$$e(t) = 5,0 \cos(3,1 \times 10^2 t)$$

$$s(t) = 4,0 \cos(3,1 \times 10^2 t \pm 3,1)$$

En complexe, les signaux deviennent :

$$\underline{e(t)} = 5,0 e^{j3,1 \times 10^2 t}$$

$$\underline{s(t)} = 4,0 e^{j(3,1 \times 10^2 t \pm 3,1)}$$

L'expression numérique de $\underline{H}(j3,1 \times 10^2)$ donne :

$$\underline{H}(j3,1 \times 10^2) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{4,0 e^{j(3,1 \times 10^2 t \pm 3,1)}}{5,0 e^{j3,1 \times 10^2 t}} = \frac{4,0}{5,0} \times \frac{e^{j3,1 \times 10^2 t} \times e^{\pm j3,1}}{e^{j3,1 \times 10^2 t}}$$

$$\underline{H}(j3,1 \times 10^2) = \frac{4,0}{5,0} \times e^{\pm j3,1} = \mathbf{0,80} \times \boldsymbol{e^{\pm j3,1}}$$

Correction de l'exercice 5 - TD du chapitre 08

1. Le système est d'ordre 2 car le plus haut degré de dérivée du signal de sortie est 2 ($\frac{d^2x}{dt^2}$).

2. La forme canonique est :

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt}+\omega_0^2 s = H_0\times\omega_0^2\times e$$

Le système se comporte donc comme un passe-bas.

3. Par identification, on obtient un système de 3 équations à 3 inconnues ($H_0; \omega_0\ et\ Q$) :

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt}+\omega_0^2 s = H_0\times\omega_0^2\times e$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}\times\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{k}{m}\ x_A(t)$$

$$\omega_0^2 s=\frac{k}{m}x \iff \omega_0{}^2=\frac{k}{m} \iff \boldsymbol{\omega_0}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}$$

$$H_0\times\omega_0^2\times e=\frac{k}{m}\ x_A(t) \iff H_0\times\omega_0^2=\frac{k}{m} \iff \boldsymbol{H_0=1}$$

$$\frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt}=\frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt} \iff \frac{\omega_0}{Q}=\frac{\lambda}{m} \iff Q=\frac{m\omega_0}{\lambda}=\frac{m}{\lambda}\sqrt{\frac{k}{m}} \iff \boldsymbol{Q}=\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{\lambda}}\sqrt{\boldsymbol{mk}}$$

4. Calcul du facteur de qualité :

$$Q=\frac{1}{\lambda}\sqrt{km}=\frac{1}{10}\sqrt{10\times 10{,}0}=1{,}0>\frac{1}{\sqrt{2}}$$

On va donc observer un phénomène de résonance : le signal de sortie aura une amplitude maximale pour une fréquence f_r du signal d'entrée.

5. Expression de $\underline{H}(j\omega)$:

On passe les signaux en complexe (RSF) :

$$\frac{d^2\underline{s}}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{d\underline{s}}{dt}+\omega_0^2\underline{s}=H_0\times\omega_0^2\times\underline{e}$$

On remplace $\frac{d\underline{s}}{dt}=j\omega\times\underline{s}$ et $\frac{d^2\underline{s}}{dt^2}=-\omega^2\times\underline{s}$:

$$-\omega^2\times\underline{s}+\underline{s}\times j\omega\frac{\omega_0}{Q}+\underline{s}\times\omega_0^2=H_0\omega_0^2\times\underline{e}$$

On factorise par $\underline{s}$:

$$\underline{s}(-\omega^2+j\omega\frac{\omega_0}{Q}+\omega_0^2)=H_0\omega_0^2\times\underline{e}$$

On trie partie réelle et imaginaire :

$$\underline{s}(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}) = H_0\omega_0^2 \times \underline{e}$$

$$\underline{s} = \frac{H_0\omega_0^2 \times \underline{e}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}}$$

On divise par ω_0^2 :

$$\underline{s} = \frac{H_0\underline{e}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

$$\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

$$\boldsymbol{\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

6. Expression littérale de $|\underline{H}(j\omega)|$:

$$|\underline{H}(j\omega)| = \left|\frac{H_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}\right| = \frac{|H_0|}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right|} = \boldsymbol{\frac{H_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

$$car\ |H_0| = H_0 = 1$$

7. *Étude à basses fréquences/pulsations :*

Si ω tend vers 0 :

$$\lim_{\omega\to 0}|\underline{H}(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{(1-0^2)^2 + 0^2}} = H_0$$

Avec $H_0 = 1$, le système est alors passeur à basses fréquences.

8. *Étude à hautes fréquences/pulsations :*

Si ω tend vers $+\infty$:

$$\lim_{\omega\to +\infty}|\underline{H}(j\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{(1-(+\infty)^2)^2 + (+\infty)^2}} = 0$$

Le système est atténuateur à hautes fréquences.

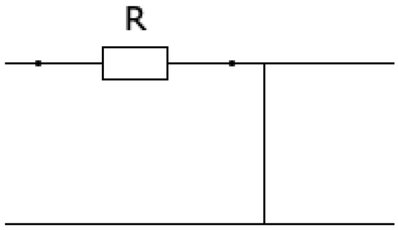
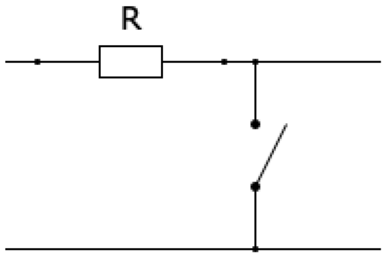
9. On retrouve le comportement passe-bas du système grâce à cette étude de limites de la fonction $|\underline{H}(j\omega)|$.

10. Tableau d'analogie :

	Système mécanique	Système électrique
Equation différentielle	$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\lambda}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{k}{m}\,x_A(t)$	$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{LC}=\frac{1}{LC}\times e(t)$
Forme canonique de l'équation différentielle	$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt}+\omega_0^2 s=H_0\times\omega_0^2\times e$	$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt}+\omega_0^2 s=H_0\times\omega_0^2\times e$
Expression de $\underline{H}(j\omega)$	$\frac{H_0}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$	$\frac{H_0}{1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}+j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$
Signal d'entrée et expression littérale	Déplacement $x_A(t)=X_A\cos\omega t$ créé par l'excitateur	Tension $e(t)=E\cos\omega t$ fournie par le GBF
Signal de sortie et expression littérale	Déplacement de la masse x(t) $x(t)=X_m\cos(\omega t+\ \varphi)$	Tension $u_C(t)$ $u_C(t)=U_m\cos(\omega t+\ \varphi)$
Paramètres du problème	Coefficient de frottements λ	Résistance R
	Masse m	Inductance L
	Ressort de raideur k	Inverse de la Capacité $\frac{1}{C}$
Pulsation propre	$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\omega_0=\sqrt{\frac{1/C}{L}}=\sqrt{\frac{1}{LC}}=\frac{1}{\sqrt{LC}}$
Facteur de qualité	$Q=\frac{\sqrt{km}}{\lambda}$	$Q=\frac{\sqrt{1/C\times L}}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$
Régime sinusoïdal forcé	Apparaît après le régime transitoire. La fréquence du signal de sortie est égale à celle du signal d'entrée	Apparaît après le régime transitoire La fréquence du signal de sortie est égale à celle du signal d'entrée
Amplitude du signal de sortie en RSF	X_m dépend de la fréquence f du signal d'entrée	U_m dépend de la fréquence f du signal d'entrée.
Déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée en RSF	φ dépend de la fréquence f du signal d'entrée	φ dépend de la fréquence f du signal d'entrée

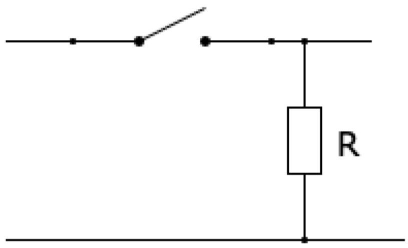
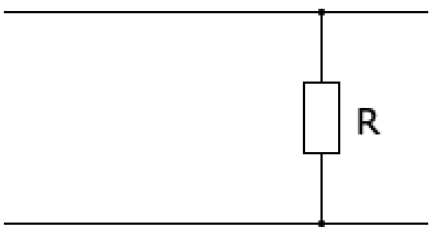
Correction de l’exercice 7 - TD du chapitre 08

- **Système A :**

	Schéma du système	Étude de la valeur du signal de sortie	Conclusion
Comportement à basses fréquences		$u_L = 0\ V$	Le système coupe les basses fréquences.
Comportement à hautes fréquences		$u_L \neq 0\ V$	Le système laisse passer les hautes fréquences.

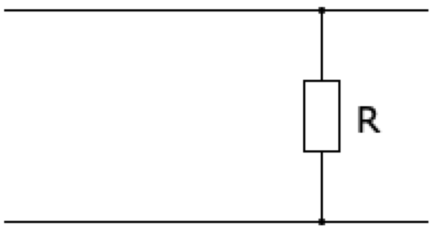
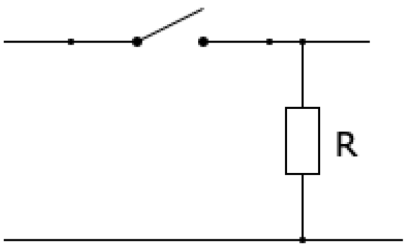
Le système A est un filtre passe-haut.

- **Système B :**

	Schéma du système	Étude de la valeur du signal de sortie	Conclusion
Comportement à basses fréquences		$u_R = 0\ V$	Le système coupe les basses fréquences.
Comportement à hautes fréquences		$u_R \neq 0\ V$	Le système laisse passer les hautes fréquences.

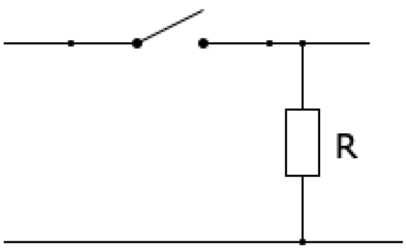
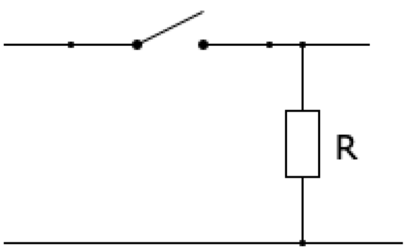
Le système B est un filtre passe-haut.

❖ **Système C :**

	Schéma du système	Étude de la valeur du signal de sortie	Conclusion
Comportement à basses fréquences		$u_R \neq 0\ V$	Le système laisse passer les basses fréquences.
Comportement à hautes fréquences		$u_R = 0\ V$	Le système coupe les hautes fréquences.

Le système C est un filtre passe-bas.

❖ **Système D :**

	Schéma du système	Étude de la valeur du signal de sortie	Conclusion
Comportement à basses fréquences		$u_R = 0\ V$	Le système coupe les basses fréquences.
Comportement à hautes fréquences		$u_R = 0\ V$	Le système coupe les hautes fréquences.

Le système D est un filtre passe-bande.